

## **Работа №6 Задачи по составлению алгоритмов и структур данных с использованием двумерных массивов повышенной сложности.**

Цель работы: закрепить понятия и навыки составления алгоритмов, структур данных и программирования с использованием двумерных массивов на примере моделирования дискретных последовательностей по известным уравнениям динамики численности популяций с представлением результатов диаграммами различных типов.

Задачи:

- 1) построить модель динамики численности популяции на основе дискретного логистического уравнения заданного вида с аддитивной случайной составляющей;
- 2) на основе построенной модели создать программу в виде html-документа со скриптами на языке Javascript с отображением результата в виде графика генерируемой последовательности, диаграммы Ламерея и фазово-параметрической диаграммы;
- 3) закрепить полученные знания и навыки путём ответов на вопросы для самоконтроля с отображением ответов на отдельной странице.

Время выполнения: 2 часа.

### **1 Краткие теоретические сведения**

Используемые в настоящей работе дискретные уравнения относятся к классу так называемых логистических уравнений. Вычисляемые значения функции по результатам решения таких уравнений имеют вид логистической кривой, когда сначала прирост увеличивается, а достигнув определённого уровня, приостанавливается. Известный биолог Роберт Мэй писал: "...я настоятельно советую, чтобы люди познакомились с логистическим уравнением на раннем этапе своего обучения математике. Такое изучение очень обогащало бы интуитивные знания учащегося о нелинейных системах. Для всех нас было бы лучше, если бы не только в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно больше людей поняло, что простые нелинейные системы не всегда обладают простыми динамическими свойствами".

Логистические уравнения относятся к нелинейным математическим уравнениям. Считается, что одна из основных заслуг ЭВМ в вычислительной математике состоит в том, что с их помощью человечество получило возможность изучать и использовать нелинейные уравнения. С их помощью удаётся описать во много раз больше природных явлений, чем это можно было сделать ранее с помощью линейных уравнений, обычно изучаемых в классической математике без применения ЭВМ.

Все логистические уравнения можно разделить на непрерывные и дискретные. Мы будем рассматривать дискретные логистические уравнения, позволяющие решать

обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения численными (и, даже, графическими) методами. Дискретные логистические уравнения отличаются от других дифференциальных нелинейных уравнений тем, что для их решения можно использовать методы, доступные инженеру. В то же время, с их помощью можно описывать достаточно сложные природные явления, встречающиеся в инженерной практике. В на первый взгляд простых дискретных логистических моделях заложено сложное поведение, которое в моделях другого типа приходится описывать трудно анализируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных.

Ниже будут даны некоторые теоретические сведения, необходимые для выполнения заданий настоящей лабораторной работы. При этом будем рассматривать лишь сведения, необходимые для программирования процедур моделирования последовательностей, представления их в виде различных диаграмм и начальных процедур анализа с помощью этих диаграмм.

Впоследствии, на старших курсах, полученные навыки программирования для автоматизации моделирования и построения диаграмм пригодятся при изучении ряда дисциплин. Более подробный материал по теме дискретных логистических уравнений находится в конспекте лекций. Кроме этого, о моделировании на основе логистических уравнений можно ознакомиться в работе [Ахроммева] или здесь: [Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 528 стр.](#) Теоретические сведения по теме настоящей лабораторной работы с учётом случайной составляющей также подробно изложены в подробной работе Башкирцевой И. А. и др. «Обратные стохастические бифуркации циклов дискретных систем », которую можно найти по ссылке здесь: <http://elibrary.ru/item.asp?id=15574685> или здесь <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/1758/1> .

Допустим, нас интересует изменение численности какого-либо вида организмов (популяции организмов) через определённые отрезки времени  $t$ . Отрезок времени может быть любым, в зависимости от вида организмов, которые мы изучаем (минута, час, сутки, год и т.д.) Один раз по прошествии этого отрезка времени  $t$  мы подсчитываем количество организмов (численность)  $x$ . По этим данным можно построить последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_t$ . Обычно такую последовательность, в которой в качестве индекса используется время, называют временной последовательностью или временным рядом. Естественно ожидать, что численность популяции в данный момент  $x_{t+1}$  зависит от того, сколько организмов было в предшествующий момент, то есть от величины  $x_t$ . Таким образом, нашу последовательность можно попытаться описать с помощью выражения, которое в общем случае можно записать в следующем виде:

$$x_{t+1} = f(x_t, P), \quad (1)$$

где  $f$  — непрерывная функция;  $P$  — параметры, количество которых зависят от вида функции.

Если в функции, используемой в выражении (1) присутствует один параметр, то такие функции или уравнения называют однопараметрическими, если два — двухпараметрическими и так далее. В инженерной практике обычно используют уравнения с небольшим числом параметром, а чаще стремятся упростить задачу, сводя уравнение к однопараметрическому путём различных преобразований.

В простейшем случае наш временной ряд можно пытаться описать следующим уравнением с двумя параметрами:

$$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t \cdot (N - x_t), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x_t \leq N, \quad 0 \leq (\lambda \cdot N) \leq 4, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — параметр, от которого зависит скорость роста (темп роста) численности (часто называют управляющим параметром);  $N$  — параметр, имеющий смысл численности, максимально возможной для данной популяции.

Первооткрывателем логистического уравнения подобного вида считают голландского гидробиолога Ферхюльста (Verhulst, 1836 ÷ 1845 г.г.). Предполагают, что общий вид уравнения предложил Ферхюльсту его известный учитель Дж.Кьютелет (Кутелет, Кетле, Adolphe Quetelet, живший в 1796-1874 г.г.). В прошлом веке на него и другие логистические уравнения снова обратили внимание учёные (американский биолог Раймонд Пирл, рост популяции плодовых мушек, 1940 г.) и математики (американский математик-метеоролог Э.Лоренц, 1963 г.) и на основе разработанных для них новых методов был создан новый раздел математического анализа для большого семейства так называемых функциональных уравнений (американский математик М.Фейгенбаум и др.).

На этом примере мы познакомимся с поведением нелинейной динамической системы. Независимо от конкретной физической природы любой объект является **динамической системой**, если можно указать такой набор величин (называемых **динамическими или управляющими переменными**), значения которых в любой последующий момент времени выводятся из начального набора по определенному правилу — **закону эволюции**.

Важное преимущество логистических моделей состоит в том, что они имеют небольшое количество управляющих параметров. Например, в модели Ферхюльста достаточно менять всего лишь один управляющий параметр  $\lambda$ , чтобы получить последовательность, описывающую совершенно другие, не только количественно, но и качественно отличающиеся, режимы динамики.

Формула (2) показывает, что численность популяции быстро растёт, пока она мала

$(x_t \ll N)$ , и начинает убывать, когда численность велика (приближается к  $N$ ).

Численность автоматически регулируется. Такие модели иногда называют автокаталитическими, по аналогии с некоторыми химическими реакциями, или автомодельными, по аналогии с некоторыми видами колебательных систем в физике.

Сведём наше двухпараметрическое уравнение (2) к уравнению с одним параметром. Для этого сделаем замену переменных:

$$x_t = x'_t \cdot N, \quad \lambda = \lambda' / N. \quad (3)$$

Тогда формулу (2) можно привести к виду

$$x'_{t+1} = \lambda' \cdot x'_t \cdot (1 - x'_t), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x'_t \leq 1, \quad 0 \leq \lambda' \leq 4. \quad (4)$$

Для возвращения к исходной модели (2) нужно провести обратное преобразование параметров (3).

Модель (4), получаемую с помощью подобного преобразования, удобно использовать для анализа, поскольку у неё лишь один параметр  $\lambda'$  и получаемые значения меняются от 0 до 1. С её помощью мы можем увидеть, какие качественные изменения произойдут с динамикой численности популяции, описываемой моделями (2) с любым  $N$  по прошествии достаточно долгого времени. Увеличивая параметр  $\lambda'$  можно увидеть, что в последовательности возникают колебания (говорят, 2-цикл), затем и эти колебания раздваиваются (4-цикл) и т. д.

При дальнейшем увеличении  $\lambda'$  колебания возрастают и приобретают настолько сложный характер, что по виду ничем не отличаются от случайных. Управляющий параметр  $\lambda$  в моделях подобного типа ещё называют малым параметром (Э.Лоренц, основоположник теории хаоса - «эффект бабочки»: бабочка, взмахивающая крыльями в Айове, может вызвать лавину эффектов, которые могут достигнуть высшей точки в дождливый сезон в Индонезии). В том, что колебания последовательности при больших значениях управляющих параметров (в нашем примере это  $\lambda'$ ) похожи на случайные, можно убедиться с помощью построений предыдущих двух работ: тест-квадрата, автокоррелограммы и гистограммы. Но на самом деле, в отличие от случайных чисел, все или некоторые значения последовательности в модели (3.10.4) можно воспроизвести. В результате мы имеем дело не со случайными (в вероятностном смысле) числами, а с так называемым «хаосом» или «вычисляемым, предсказуемым хаосом»).

*Каскад бифуркаций оказался одним из универсальных путей перехода от детерминированного поведения системы к детерминированно-хаотическому, а универсальная константа, найденная Фейгенбаумом и впоследствии уточнённая: 4.66920 16091 02990 67185 32038 20466 20161 72581 85577... говорила о строгой детерминированности тех непредсказуемых процессов, которые происходят в детерминированно - хаотической системе и об универсальности законов, управляющих поведением таких систем. Кроме того,*

число-инвариант, полученное Фейгенбаумом, позволило предугадать, когда именно произойдёт следующий скачок системы в состояние детерминированного хаоса. Открытие Фейгенбаума показало, что дело не в уравнениях, с появлением детерминированного хаоса вид уравнения теряет свою значимость.

Исходная модель (2) нужна для работы с фактически существующей популяцией. Подобрать параметры модели так, чтобы она хорошо описывала наблюдаемые значения численности, затем можно использовать модель для анализа методом имитационного моделирования, задавая различные значения управляющих параметров и исследуя популяцию в режимах, не описываемых имеющимися натурными данными, но вполне возможными в экстремальных ситуациях. Предсказать возможность таких ситуаций как раз очень важно для гарантированного выживания популяций некоторых видов организмов.

Следует обратить внимание, что для получения модельных значений последовательности необходимо задать начальное значение. Обозначим это значение через  $x_0$ . При изменении начального значения первые значения последовательности будут различаться, но для достаточно больших  $t$  последовательность обязательно будет переходить к похожим режимам динамики при одних и тех же значениях  $t$ .

Продолжим развитие модели, учитывая тот факт, что в действительности численность популяции подвергается различным воздействиям, которые невозможно учесть и поэтому отождествляются со случайными величинами. Такие случайные величины часто называют «шумом». Дискретную логистическую модель с аддитивными случайными возмущениями (шумом) в общем случае можно записать в виде выражения:

$$x_{t+1} = f(x_t, \lambda) + \varepsilon \cdot \zeta_t, \quad (5)$$

где  $x_{t+1}$  - численность популяции в последующий период;

$x_t$  - численность популяции в предыдущий период;

$\lambda$  — управляющий параметр, определяющий темп роста;

$\varepsilon$  - уровень шума, определяет интенсивность шума;

$\zeta_t$  — последовательность взаимнонезависимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице (пишут:  $\zeta_t \in N(0, 1)$ ). Вызывает случайные воздействия (шум).

«Аддитивный» означает, что введённое нами случайная составляющая прибавляется, в отличие от «мультипликативной» составляющей, когда такая составляющая воздействует посредством умножения.

Применительно к нашему примеру (к модели (4)) наличие аддитивного шума можно учесть с помощью выражения

$$x'_{t+1} = \lambda' \cdot x'_t \cdot (1 - x'_t) + \varepsilon \cdot \zeta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x'_t \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 4, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  - уровень шума, который можно менять от 0 до 1.

Случайные числа  $\xi_t$ , имеющие необходимое распределение, вы научились генерировать, выполняя задание предыдущей лабораторной работы.

Модель (6) достаточно сложна и анализировать её классическими аналитическими методами очень трудно или невозможно. Для этого используют численные методы моделирования с помощью компьютера.

Для анализа полученной модели используют различные виды графиков (диаграмм). В настоящей работе нужно использовать три вида графиков, а именно:

график временной последовательности;

диаграмму Ламерея;

бифуркационную диаграмму.

**График временной последовательности** строится достаточно просто. По оси абсцисс откладывается значение  $t$ , а по оси ординат — значение, получаемое по модели. Вы уже программировали графики подобного вида в предыдущих работах. Для программирования таких графиков удобно использовать графические библиотеки, например Javascript-библиотеке Highcharts.

Воспользуемся графиками первого вида и рассмотрим примеры того, что происходит на первых итерациях (сразу же после «зарождения» популяции, в переходный период) в модели (6) при различных значениях параметра  $\lambda'$  при уровне шума  $\varepsilon = 0$  (то есть, по сути - это модель (4) ). Какое-то количество итераций необходимо для достижения некоторого установившегося уровня численности, при котором значения численности:

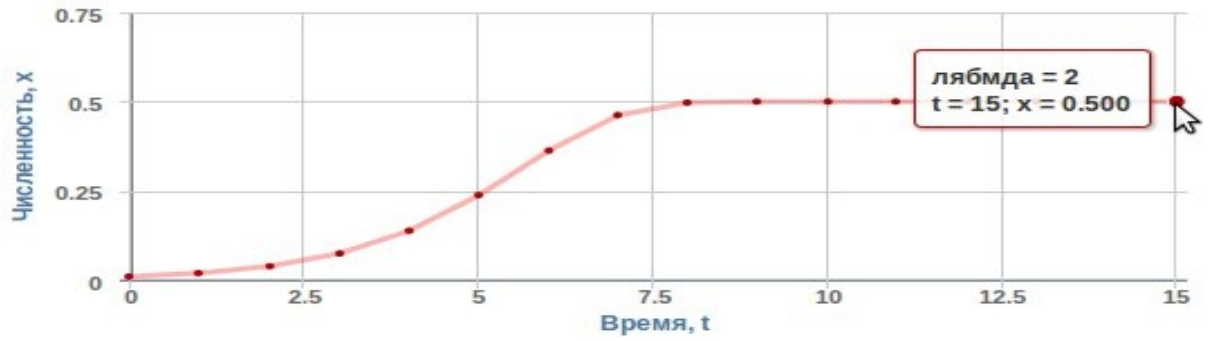
либо достигают постоянного значения (при  $1 \leq \lambda' \leq 2$ , рис.1 а);

либо достигают уровня, вокруг которого поначалу колеблются с большой амплитудой, а затем, некоторое время убывая постепенно достигают постоянного значения (при  $2 \leq \lambda' \leq 3$ , рис.1 б);

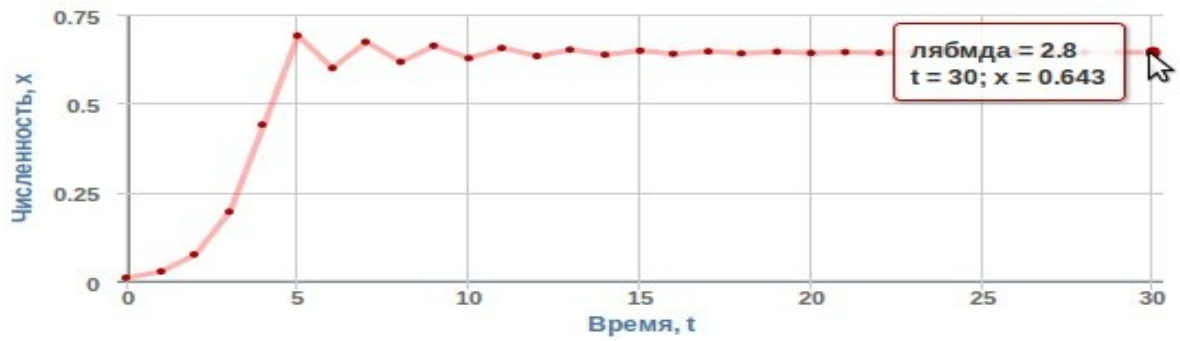
либо, наоборот, достигают уровня, вокруг которого, возрождаясь, колебания постепенно достигают некоторой постоянной амплитуды, постепенно становятся устойчивыми двухточечными (при  $3 \leq \lambda' \leq 3.45$ , рис.1 в);

либо очень быстро достигают значений, которые на первый взгляд похожи на хаотические, а на самом деле состоят из колебаний нескольких периодов и амплитуд (при  $\lambda' > 3.45$ , рис.1 г). Для достижения устойчивого состояния, при котором через некоторые промежутки времени колебания повторяются, такой популяции также необходим определённый переходный период.

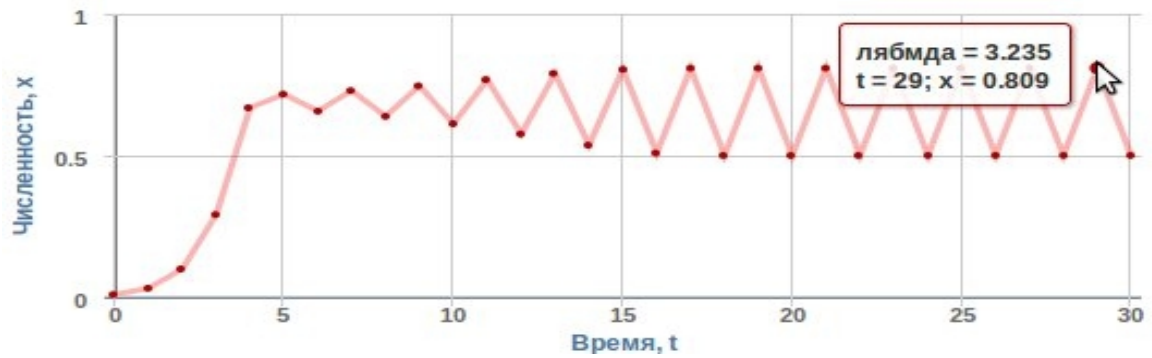
а)



б)



в)



г)

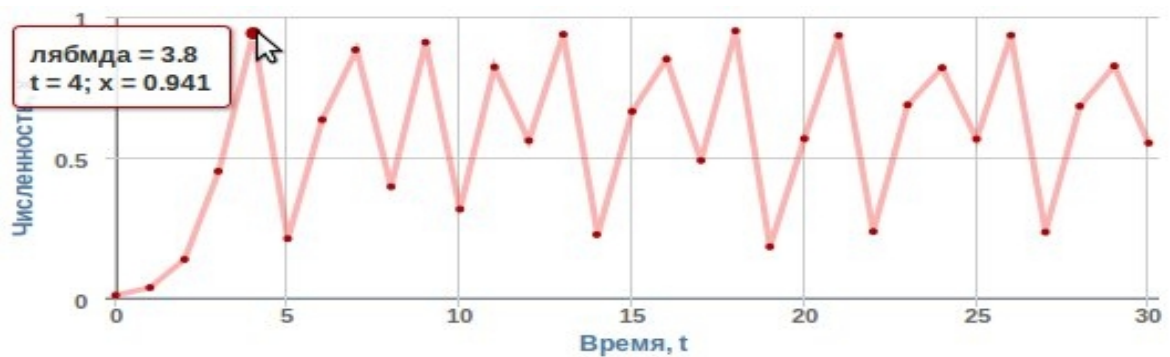


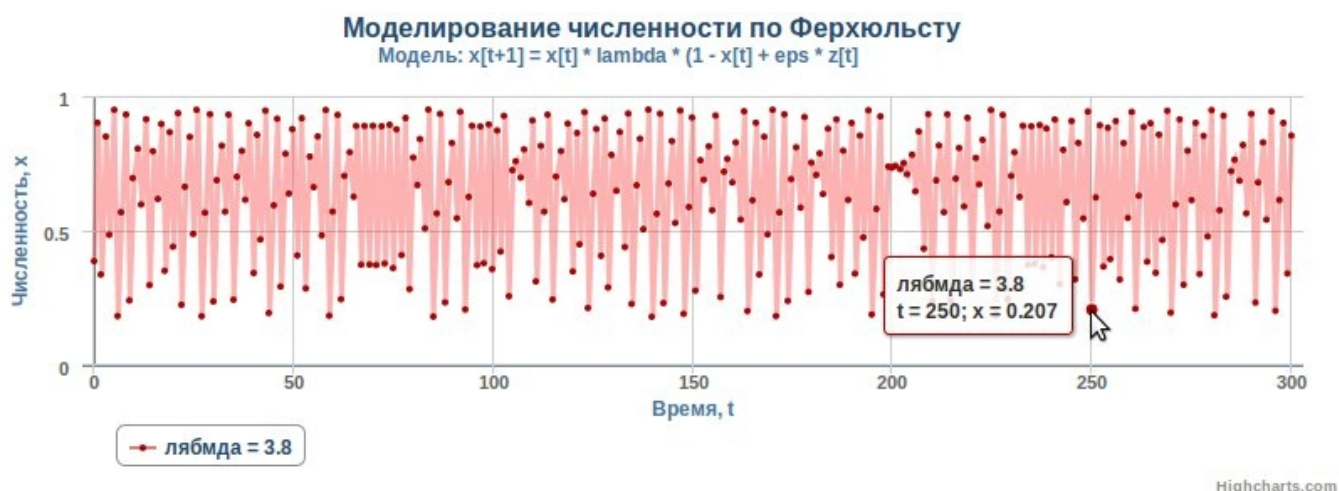
Рис. 1 Примеры первых членов последовательности в модели (4) при  $x_0 = 0.01$ :

а)  $\lambda' = 2.0$ ; б)  $\lambda' = 2.8$ ; в)  $\lambda' = 3.235$ ; г)  $\lambda' = 3.8$ .

Рис. 1 демонстрирует лишь некоторые виды переходного периода при зарождении популяций с различными темпами роста численности. Переходный период имеет

самостоятельное значение при моделировании биоресурсов, однако здесь эта демонстрация показана для того, чтобы стало понятно, что для достижения устойчивых состояний в дискретных логистических моделях нужно пройти некоторое количество итераций. При различных значениях управляющего параметра, определяющего темп роста численности, этот переходный период различен.

Первые значения, пока последовательность подходит к установившимся значениям, вычисляются, но не используются. Для всех моделей, используемых в вариантах настоящей работы, достаточно примерно 200 таких значений. И лишь 200-е значение берётся за начальное для вычисления некоторого количества последующих значений. Эти значения откладываются точками на графике. На рис. 1 показан пример такого графика для модели (4') при  $\lambda' = 3.8$  и при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ).



**Рис. 2** Пример графика первого вида для модели (3.10.4') при  $\lambda' = 3.8$  и при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ), программируемого с помощью графической библиотеки Highcharts

**Диаграмму Ламерея** иногда ещё называют «лестницей Ламерея» и «паутиной диаграммой». Диаграмма этого вида хорошо представляет так называемое «отображение отрезка в себя» для рассматриваемого вида модели. С её помощью также хорошо графически представляется «метод простых итераций» численного нахождения корней уравнений. В нашем случае с помощью диаграммы такого вида можно наглядно отображать процесс зарождения удвоения циклов в последовательности и точки, в которых такое раздвоение происходит (точки бифуркации - раздвоения, или разветвления).

Об анализе с помощью диаграммы Ламерея следует почитать в конспекте лекций. Полезно воспользоваться также источниками по упомянутым выше ссылкам. Здесь лишь кратко углубим некоторые теоретические понятия, рекомендуемые студентам, желающим глубже понять более «тонкие» свойства дискретных логистик,



«вскрываемые» с помощью диаграммы Ламерея.

**Дискретные отображения** (<http://www.edu.nstu.ru/courses/msos/>).

Рассмотрим функцию, отображающую некоторое множество само с себя:  
 $f: M \rightarrow M$

Итерация функции  $f^m$  определяется как композиция  $f$  с самой собой  $m$  раз:  $f^0 = f$ ,  
 $f^m = f^{m-1} \circ f$ .

Итерацию можно выразить другим способом, с помощью рекурсии:

$$f^m(x) = f(f(\dots f(x)\dots)) \quad (7)$$

где в правой части функция вычисляется  $m$  раз.

Поскольку каждая точка  $x \in M$  под действием итераций функции  $f$  перемещается по множеству  $M$ , то функция  $f$  задаёт дискретную динамическую систему, то есть некое движение на множестве  $M$  с течением дискретного времени  $m$ . Если для некоторой точки  $x \in M$  определены все итерации  $f^m(x)$ , то множество  $\{f^m(x): m \in M\}$  называется орбитой точки  $x$  под действием функции  $f$ .

Точка  $x$  называется **неподвижной точкой** функции  $f$ , если  $f^m(x, P) = x$  для любого  $m$ . неподвижная точка функции называется **притягивающей**, если все точки из некоторой её окрестности стремятся к  $x$  под действием итераций функции  $f$ , и **отталкивающей**, если все точки из некоторой окрестности покидают эту окрестность под действием итераций. Если неподвижная точка является притягивающей либо отталкивающей, то она также называется **гиперболической**.

Точка  $x$  называется **периодической точкой** функции  $f$  периода  $k$ , если  $f^m(x, P) = x$ , причём  $f^i(x, P) \neq x$ , при  $i < k$ . Орбита периодической точки состоит из  $k$  точек и называется циклом периода  $k$ . Точка  $x$  является периодической точкой функции  $f$  периода  $k$ , если она является неподвижной точкой итерации  $f^k$ , но не является периодической точкой итераций с меньшими номерами.

Определив основные термины, возвратимся к исследованию нашей логистической функции (4). Рекурсивное выражение (7) для такой функции при  $m = 2$  будет иметь вид:

$$f^2(x_t, \lambda') = \lambda' \cdot (\lambda' \cdot x'_t \cdot (1 - x'_t)) \cdot (1 - \lambda' \cdot x'_t \cdot (1 - x'_t)). \quad (8)$$

Свойств выражения (4) достаточно для установления поведения динамики численности для значений  $\lambda'$ , не превышающих  $= 3$ . С помощью (8) можно исследовать динамику до значений  $\lambda' \approx 3.45$ . Для исследования последовательности при

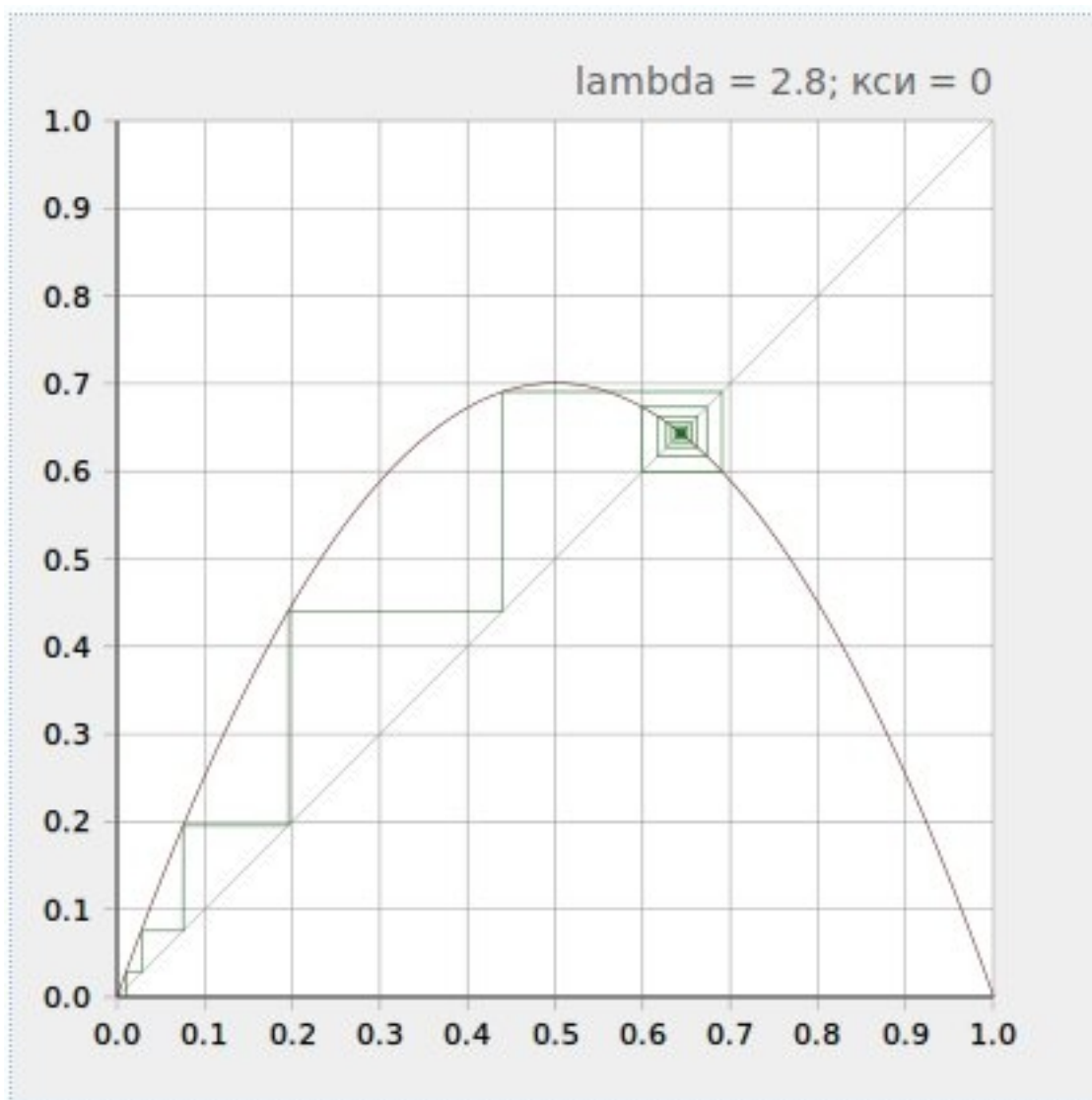
$3.45 \leq \lambda' \leq 3.54$ , то есть до очередной точки бифуркации (см. бифуркационную диаграмму), необходима итерация при  $m = 4$ .

Ниже, ограничившись выражениями (4) и (8), кратко опишем способ построения диаграммы Ламерея, который вам необходимо запрограммировать.

Вначале строятся биссектриса и график зависимости каждого последующего значения от предыдущего. Построение биссектрисы не требует пояснений (график функции  $y = x$ ), а график зависимости последующего значения от предыдущего будет иметь вид кривой, которая строится следующим образом.

По оси абсцисс через равные интервалы откладываются значения  $x$  от 0 до 1. Каждое из этих значений в качестве предыдущего значения и подставляется в формулу (4) или (8), то есть вычисляется значение  $y = f(x) = \lambda' \cdot x \cdot (1 - x)$ , которое откладывается по оси ординат. Получаемые точки лежат на гладкой кривой, описывающей все возможные зависимости между предыдущим и последующим значениями. Интервалы берутся такими, чтобы на диаграмме было достаточно много точек, соединив которые отрезками прямых, можно было бы нарисовать кривую, соответствующую модели.

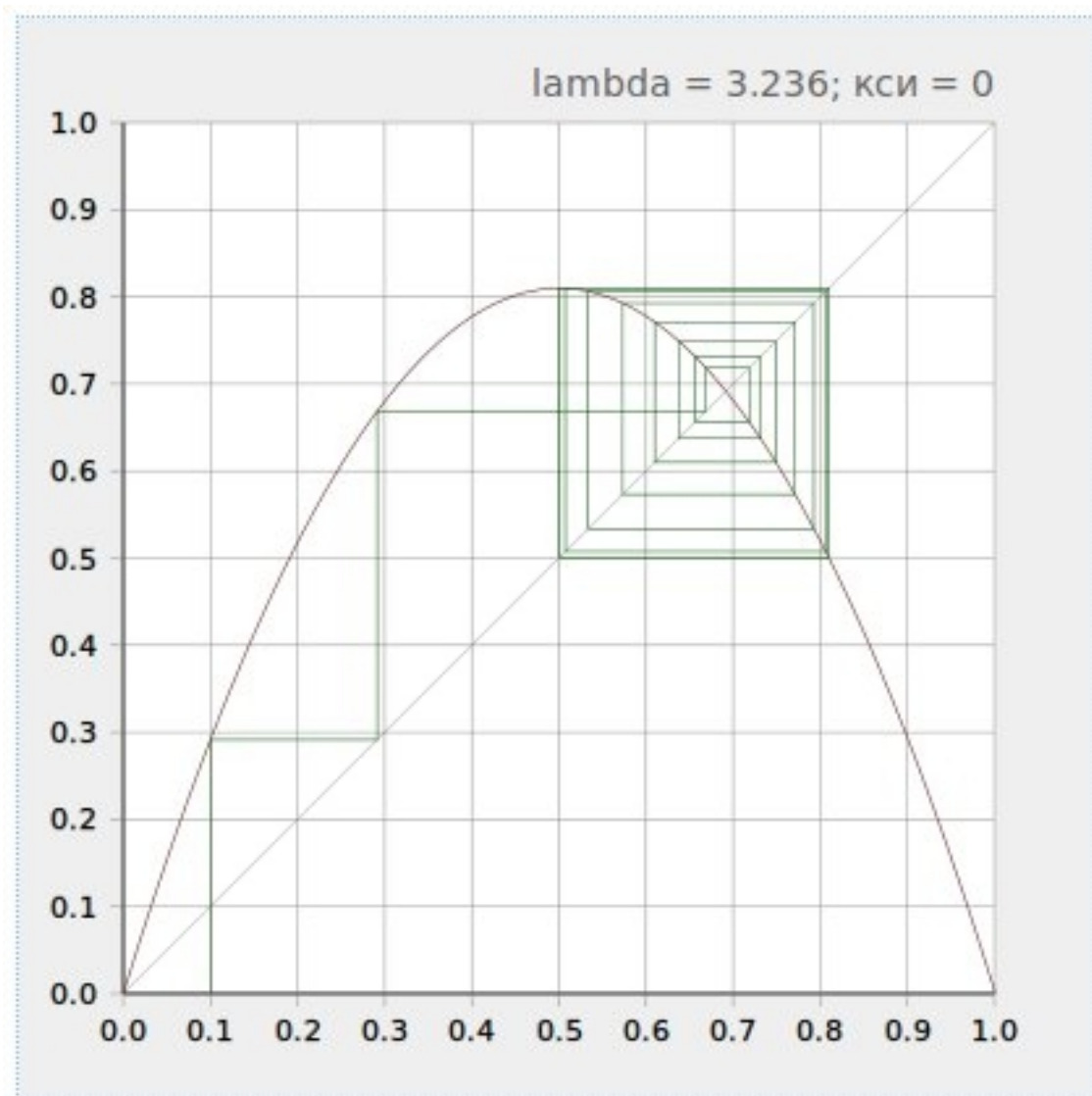
Затем по оси абсцисс откладывается начальное значение и на вертикали, в точке её пересечения с кривой, находится первое значение по модели. Таким образом графически воспроизведена первая итерация метода простых итераций. Затем, от полученной точки проводится горизонтальная прямая и в точке её пересечения с биссектрисой находится значения на оси абсцисс. От полученной точки проводится прямая и в точке её пересечения с кривой находится второе значение по модели (4'). Так, графически воспроизведена вторая итерация метода простых итераций. Повторяя эти действия достаточно большое число раз на диаграмме Ламерея строится лестница, возможно переходящая в спирали из построенных отрезков прямых. При некоторых значениях управляющего параметра  $\lambda'$  лестница или спирали сходятся в одну или несколько точек. Эти точки являются так называемыми точками бифуркации. Для конкретного значения управляющего параметра  $\lambda'$  с помощью диаграммы Ламерея можно изучать положение точек бифуркации, которые сложно определить с помощью графика предыдущего вида. Пример диаграммы для одного из значений  $\lambda'$  модели (4'), а именно, при  $\lambda' = 2.8$ , показан на рис. 3. Отображение  $f(x'_t)$  при этом значении параметра имеет устойчивую неподвижную точку  $x'_t = 0.643$ .



**Рис. 3** Пример диаграммы Ламерея для модели (4) при  $\lambda' = 2.8$  и  $x'_0 = 0.01$ , программируемой с использованием HTML5 Canvas. Отображение  $f(x'_t)$  при этом значении параметра имеет устойчивую неподвижную точку  $x'_t = 0.643$ .

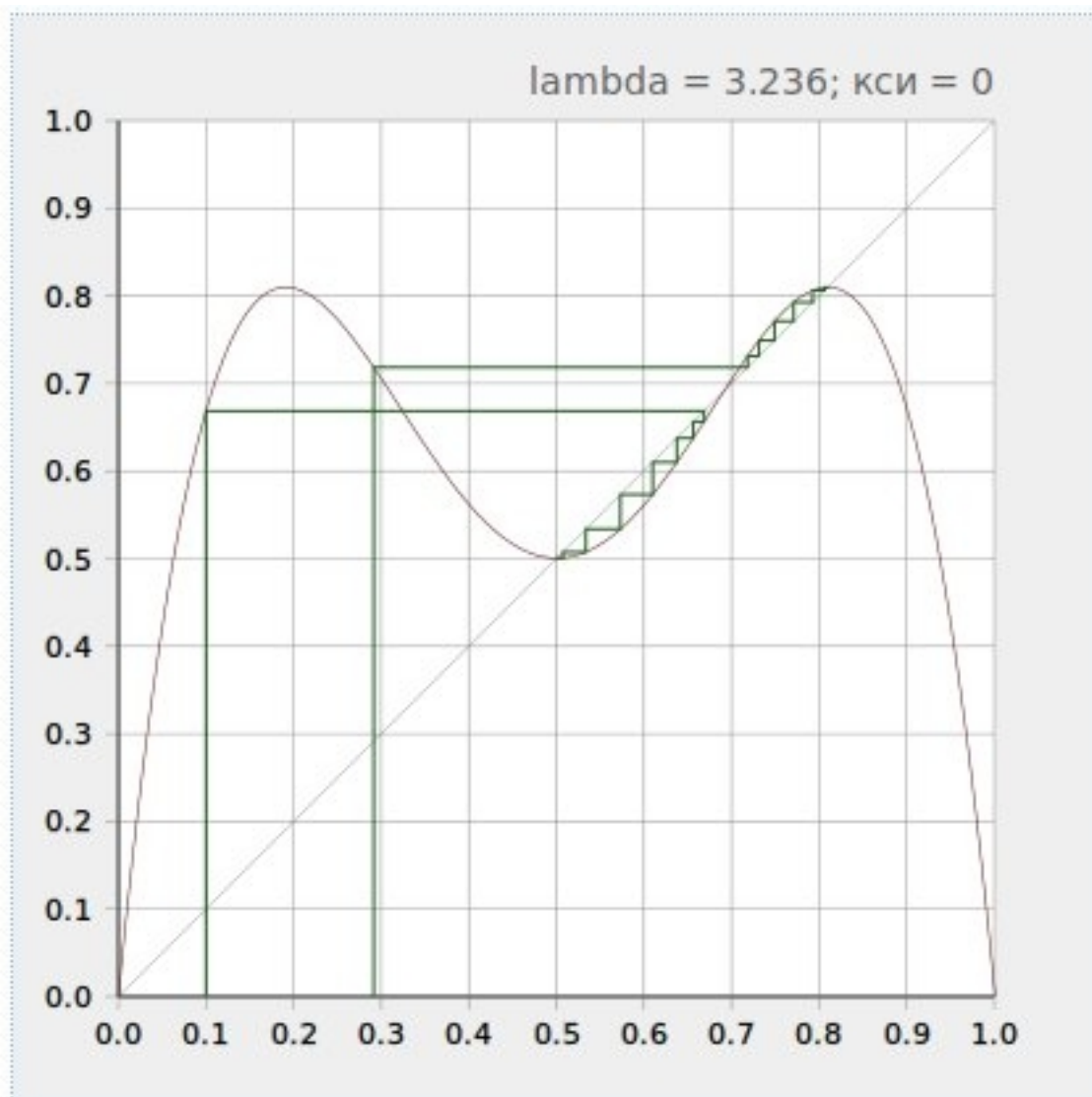
Начальное значение при таком значении управляющего параметра ( $\lambda' = 2.8$ ) может быть любым, последовательность всё равно будет сходиться к  $x'_t = 0.643$ .

Диаграмма для той же модели ((4) но при  $\lambda' = 3.236$  изображена на рис.4.



**Рис. 4** Пример диаграммы Ламерея для модели (4') при  $\lambda' = 3.236$  и при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ), программируемой с использованием HTML5 Canvas. Отображение  $f^1(x'_t)$  при этом значении параметра имеет устойчивый цикл  $S^2$  с двумя устойчивыми периодическими значениями  $x'_t = 0.809$  и  $x'_t = 0.5$ . Периодические точки на такой диаграмме трудно рассмотреть.

Поскольку значение  $\lambda' > 3$ , периодические значения  $x'_t = 0.809$  и  $x'_t = 0.5$  на диаграмме трудно определить. Можно лишь догадаться об этом, поскольку для данного значения управляющего параметра лестница на диаграмме достаточно хорошо позволяет проследить, на каких значениях диаграмма закичивается. Гораздо отчётливее наличие двух точек устойчивого цикла для того же значения  $\lambda' = 3.236$  видно на диаграмме для модели (8), показанной на рис.5.

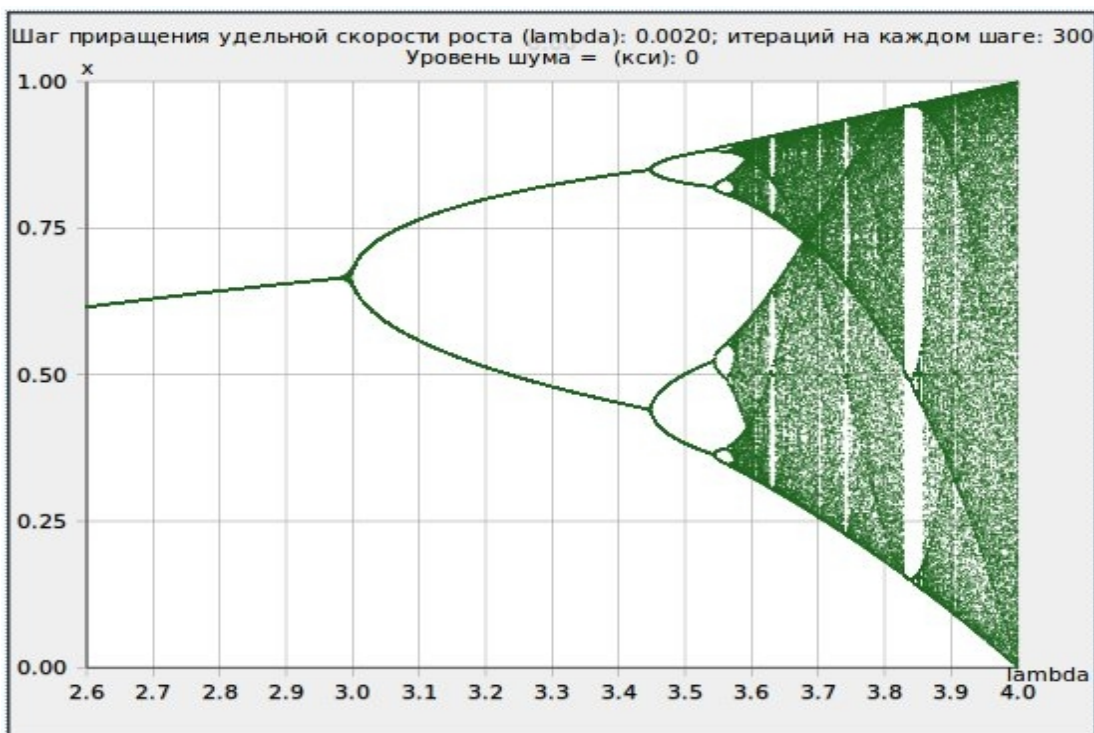


**Рис. 5** Пример диаграммы Ламерея для модели (8) при  $\lambda' = 3.236$  и при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ), программируемой с использованием HTML5 Canvas. Отображение  $f^2(x'_t)$  при этом значении параметра имеет устойчивый цикл  $S^2$  с двумя устойчивыми точками  $x'_t = 0.809$  и  $x'_t = 0.5$ .  
Периодические точки на такой диаграмме чётко фиксируются.

Как упоминалось выше, отображение (8) можно использовать для исследования цикла  $S^2$ , от его зарождения, до разрушения из-за появления точек следующего цикла  $S^4$ , то есть между точками бифуркации при  $\lambda' = 3$  и  $\lambda' \approx 3.45$ . Этого чаще всего достаточно для использования на практике.

**Бифуркационная диаграмма**, последний рассматриваемый нами вид диаграмм, используется для определения положения точек бифуркации для различных значений управляющего параметра  $\lambda'$  (в модели (4')). По оси абсцисс откладываются значения управляющего параметра, а по оси ординат - установившиеся (для больших  $t$ ) значения численности. Первые значения, пока последовательность подходит к установившимся

значениям, вычисляются, но не используются. Для всех моделей, используемых в вариантах настоящей работы, достаточно примерно 200 таких значений. И лишь 200-е значение берётся за начальное для вычисления некоторого количества последующих значений. Эти значения откладываются точками на диаграмме. Их количество выбирается таким образом, чтобы наибольшее количество точек было отложено на участках диаграммы с хаотическим режимом. Для всех моделей, используемых в вариантах настоящей работы — это примерно 300 значений. Для небольших значений управляющего параметра все 300 точек укладываются в одну точку, отображая поведение последовательности при 1-цикле (обозначают цикл  $S^1$ ). При последующем увеличении параметра, после достижения точки бифуркации (раздвоения, разветвления), динамика имеет 2-цикл ( $S^2$ ) и на диаграмме все точки распределяются между двумя точками, затем, после очередной точки бифуркации, на диаграмме появляется цикл  $S^4$  и так далее. Пример диаграммы для модели (4') для значений  $\lambda'$ , изменяющихся от 2.6 до 4.0 и при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ), показан на рис. 6.



**Рис. 6** Пример бифуркационной диаграммы для модели (4') при отсутствии шума ( $\varepsilon = 0$ ), программируемой с использованием HTML5 Canvas

## 2 Задания

Задание в целом состоит в том, что каждому студенту необходимо написать программу в виде динамического документа со скриптами на языке Javascript, на которой поэтапно, по событию, создаваемому пользователем (например, по клику мышкой),

решались бы следующие задачи:

- 1) генерация временной последовательности численности популяции с использованием дискретной логистической модели в соответствии с вариантом задания (выбирается из таблицы 1) с выводом в виде графика, в котором по оси абсцисс откладывается время (или номер генерируемого значения), а по оси ординат — генерируемое значение. При этом необходимо предусмотреть возможность ввода и изменения всех управляющих параметров и масштаба диаграммы (график вида «ху», если использовать терминологию электронных таблиц). Для программирования графиков такого вида рекомендуется использовать графические библиотеки (например, Highcharts);
- 2) построение диаграммы Ламерея (лестницы Ламерея, паутиной диаграммы) с возможностью изменения управляющих параметров и масштаба диаграммы. Для построения диаграммы такого вида рекомендуется использовать API HTML5 Canvas;
- 3) построение фазово-параметрической диаграммы с возможностью изменения масштаба диаграммы. В качестве параметра необходимо использовать  $\lambda$  (параметр, определяющий темп роста). Для построения диаграммы такого вида также рекомендуется использовать API HTML5 Canvas;
- 4) эксперименты с заданием различных уровней шума с анализом динамики численности с на трёх типах диаграмм. Оформление выводов по результатам экспериментов необходимо оформить в виде отдельной страницы, на которой необходимо разместить текст вывода по анализу с соответствующими скриншотами трёх типов диаграмм;
- 5) закрепление полученных знаний и навыков путём ответов на вопросы для самоконтроля (см. пункт 5) с оформлением ответов в виде отдельной страницы.

Эксперименты (задача 4) необходимо провести, пройдя этапы:

- 1) меняя параметр  $\lambda$  (параметр, определяющий темп роста), исследовать различные режимы поведения численности при отсутствии аддитивных случайных воздействий (шума);
- 2) найти значения параметра  $\lambda$ , определяющего темп роста численности, при которых происходит удвоение периода (точки бифуркации);
- 3) определить значение параметра  $\lambda$ , определяющего темп роста численности, при котором система переходит в хаотический режим;
- 4) определить интервалы параметра  $\lambda$ , определяющего темп роста численности, при котором образуются «окна» - циклические колебания ( $S^3$ ) внутри хаотического режима;
- 5) последовательно увеличивая уровень шума, повторить первые четыре этапа и описать — что происходит с точками бифуркации, при уровнях шума, равных указанным по вашему варианту в таблице (6);

6) объяснить и продемонстрировать связь между тремя типами диаграмм.

Дискретную логистическую модель с аддитивными случайными возмущениями (шумом) в общем случае можно записать в виде выражения (5). Первая составляющая  $f(x_t, \lambda)$  в правой части этого выражения должна соответствовать модели, выбираемой из таблицы 1, в соответствии с вариантом, номер которого должен совпадать с последней цифрой шифра зачётной книжки.

**Таблица 1** Функции  $f(x_t, P)$ , диапазоны параметров  $\lambda$  и уровни шума  $\varepsilon$  в выражении (5)

Вариант	Авторы	Функция	Диапазон параметра $\lambda$	Уровни шума $\varepsilon$
0	Ферхюльст	$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t \cdot (1 - x_t) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	2.6 ÷ 3.9	0; 0.001; 0.005; 0.01; 0.015
1	Рикер	$x_{t+1} = x_t \cdot \exp(\lambda \cdot (1 - x_t)) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	1.8 ÷ 3	0; 0.001; 0.01; 0.1
2	Ферхюльст	$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t \cdot (1 - x_t/3) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	0.8 ÷ 1.3	0; 0.003; 0.015; 0.03; 0.045
3	Рикер	$x_{t+1} = x_t \cdot \exp(\lambda \cdot (1 - x_t/3)) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	0.6 ÷ 1	0; 0.003; 0.03; 0.3
4	Гомпертц	$w_{t+1}^{\frac{1}{3}} = w_t^{\frac{1}{3}} \cdot \exp(1 + \lambda \cdot \ln(w_t^{\frac{1}{3}}))$	0.6 ÷ 1	0; 0.001; 0.005; 0.01
5	Бивертон-Холт	$x_{t+1} = \frac{\lambda \cdot x_t}{1 + 2 \cdot x_t}$	0.6 ÷ 1	0; 0.001; 0.005; 0.01
6	Ферхюльст	$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t \cdot (3 - x_t) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	0.8 ÷ 1.3	0; 0.003; 0.015; 0.03; 0.045
7	Рикер	$x_{t+1} = x_t \cdot \exp(\lambda \cdot (3 - x_t)) + \varepsilon \cdot \zeta_t$	0.6 ÷ 1	0; 0.003; 0.03; 0.3
8	Хассел (Hassel, 1976)	$x_{t+1} = \frac{\lambda \cdot x_t}{(1 - b \cdot x_t/X)^\beta}$	0.6 ÷ 1	0; 0.003; 0.03; 0.3
9	Шепард	$x_{t+1} = \frac{\lambda \cdot x_t}{1 + (x_t/X)^\beta}$	0.6 ÷ 1	0; 0.003; 0.03; 0.3



### **3 Методика выполнения**

С точки зрения методики выполнения в настоящей работе нет ничего нового. Сложность состоит лишь в том, что нужно так продумать структуру сайта и параметров, вводимых в формы, чтобы можно было удобно и быстро провести эксперименты. С этой целью в качестве примеров рекомендуется просмотреть работы студентов прошлых лет, расположенные по адресам:

[https://pvn.org.ru/www\\_JS/students/12kmk021/www/LabRabs/LabRab10/;](https://pvn.org.ru/www_JS/students/12kmk021/www/LabRabs/LabRab10/)

[http://www/www\\_JS/students/12kmk020/www/LabRabs/LabRab10/;](http://www/www_JS/students/12kmk020/www/LabRabs/LabRab10/)

и другие.

### **4 Рекомендации по обработке и оформлению полученных результатов**

С примерами обработки результатов и их оформления можно ознакомиться на сайтах студентов прошлых лет.

### **5 Вопросы для самоконтроля**

1. Как вычисляется последовательность значений с использованием дискретных логистических уравнений (на примере какого-нибудь уравнения)?
2. Чем отличаются логистические уравнения от других видов уравнений, используемых для моделирования динамики численности популяций?
3. Почему логистические функции называют «автоподстраивающимися» («автокаталитическими» в химии)?
4. Что такое динамика и чем это понятие отличается от кинематики?
5. Что такое временной ряд (временная последовательность)?
6. Что такое переходный режим во временной последовательности, генерируемой дискретной логистической моделью?
7. Чем отличается установившийся режим от переходного во временной последовательности, генерируемой дискретной логистической моделью?
8. Когда для анализа динамики последовательности следует использовать график временной последовательности, а не другие виды графиков (диаграмм)?
9. Как с помощью последовательностей дискретных логистических уравнений моделируют последовательности численности популяций?
10. Какой параметр является управляющим в дискретных логистических моделях (на примере модели Ферхюльста или Рикера)?
11. Какие дискретные логистические уравнения вы знаете (по фамилии автора, кроме упоминаемых в других вопросах)?
12. Чем отличается аддитивный шум от мультипликативного?
13. Алгоритм построения диаграммы Ламере́ря для анализа динамики

- последовательности, генерируемой дискретным логистическим уравнением на участке с циклом  $S1$ ?
14. Алгоритм построения диаграммы Ламере́я для анализа динамики последовательности, генерируемой дискретным логистическим уравнением на участке с циклом  $S2$ ?
  15. Когда для анализа динамики последовательности следует использовать диаграммы Ламере́я, а не другие виды диаграмм (графиков)?
  16. Алгоритм построения бифуркационной диаграммы?
  17. Как называются точки на бифуркационной диаграмме, в которых происходит разветвление диаграммы (удвоение периодов последовательности)?
  18. Когда для анализа динамики последовательности следует использовать бифуркационную диаграммы, а не другие виды диаграмм (графиков)?
  19. Что такое API для HTML5 Canvas?
  20. Какие CSS-стили можно использовать для скрытия-появления участков HTML-документа на экране (на примере элементов HTML5 Canvas)?
  21. Последовательность Javascript-операторов при построении графика с помощью API HTML5 Canvas?
  22. Как указать зуммирование (масштабирование) фрагмента, выделенного вдоль вертикали и горизонтали, при построении графика с использованием API HTML5 Canvas?